INSTITUT DE STATISTIQUE de l'Université Pierre et Marie Curie

Concours d'entrée
6 et 7 juin 1996

Epreuve de Mathématique I
Durée 3 heures

Pour tout nombre entier strictement positif p, on note (E_p) l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)y = 0\,.$$

L'objet du problème est l'étude de certaines solutions de l'équation (E_p) sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et de leur comportement au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Le sujet comprend trois parties indépendantes, dont le candidat pourra cependant juger utile de vérifier la cohérence des résultats. La première partie concerne exclusivement le cas où l'entier p est égal à 1, alors que les deux autres traitent le cas général où p est un entier strictement positif quelconque.

Première partie

1) Pour tout nombre réel strictement positif x, on note :

$$s(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \text{ et } c(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,.$$

   a) Montrer que s et c sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle (E_1) sur $]0,+\infty[$.

   b) En déduire l'ensemble des solutions de (E_1) sur $]0,+\infty[$.

2) a) Trouver les solutions de (E_1) sur $]0,+\infty[$ qui sont prolongeables par continuité en 0.

   b) Résoudre (E_1) sur $[0,+\infty[$.

3) Soit f une solution de (E_1) sur $]0,+\infty[$.

   a) Montrer que f s'annule une infinité de fois (c'est-à-dire que l'ensemble des nombres réels strictement positifs x tels que $f(x)$ soit nul est infini).

b) Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

Deuxième partie

1) Soit α un nombre réel et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels telle que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ soit strictement positif (et éventuellement infini).
Pour tout $x \in]0, R[$, on pose :

$$g(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,. \tag{1}$$

a) Montrer qu'une condition nécessaire pour que g soit solution de (E_p) sur $]0, R[$ est que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 2, on ait :

$$a_{n-2} + \left((\alpha+n)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) a_n = 0 \,.$$

b) Montrer que, si a_0 n'est pas nul, g ne peut être solution de (E_p) sur $]0, R[$ que lorsque α est égal à $p/2$ ou à $-p/2$. Que peut-on dire alors de a_1?

2) a) Montrer que, lorsque p est impair, l'équation (E_p) admet sur $]0, +\infty[$ une unique solution s_p de la forme (1) pour laquelle $\alpha = p/2, a_0 = 1$ et $a_p = 0$, ainsi qu'une unique solution c_p de la forme (1) pour laquelle $\alpha = -p/2, a_0 = 1$ et $a_p = 0$.

b) Vérifier que les deux fonctions s_p et c_p sont linéairement indépendantes et calculer explicitement s_1 et c_1.

3) Pour tout m appartenant à $\mathbb{N}$, on note f_m la fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k m!}{4^k k!(k+m)!} x^{2k+m} \,.$$

a) Justifier l'existence de f_m et préciser sa valeur en 0.

b) Donner les coefficients numériques du développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0, de f_0 et de f_1.
Indiquer l'allure du graphe de ces deux fonctions au voisinage de leur point d'abscisse nulle, en précisant l'équation de la tangente correspondante.

c) Etudier la convexité de f_m au voisinage de 0 lorsque l'entier m est supérieur ou égal à 2.

4) Montrer que, lorsque le nombre entier p est pair, $f_{p/2}$ est l'unique solution de (E_p) sur $]0, +\infty[$ développable en une série entière non nulle $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dont le premier coefficient b_n non nul soit égal à 1.

Troisième partie

Dans cette partie, ϕ désigne une fonction réelle continue sur $]0,+\infty[$ telle que $\phi(x)$ tende vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

On note (D) l'équation différentielle : $y'' + \phi(x)y = 0$.

1) Justifier l'existence d'un nombre réel A strictement positif tel que

$$\forall x \geq A,\ \phi(x) > 0$$

puis d'une solution f de l'équation (D) sur $]0,+\infty[$ telle que : $f(A) > 0$.

2) Soit $A > 0$ et $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une solution de (D) vérifiant les conditions de 1).

L'objet de cette question est de démontrer par l'absurde que f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]A,+\infty[$.

On suppose donc, pour aboutir à une contradiction, que f ne s'annule pas sur $]A,+\infty[$.

a) Montrer que la dérivée f' de f est décroissante sur $[A,+\infty[$.

b) Montrer que, si cette dérivée f' reste positive ou nulle sur $[A,+\infty[$, la différence $f'(x+1) - f'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Montrer que c'est impossible, en examinant le comportement de $f''(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Montrer que, s'il existe un nombre réel B supérieur ou égal à A tel que $f'(B)$ soit strictement négatif, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_B^x f'(t)dt = -\infty\ .$$

d) Conclure.

3) Soit g une solution de (E_p) sur $]0,+\infty[$.

a) Montrer que la fonction $f : x \longrightarrow g(x)\sqrt{x}$ est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation (D) pour une fonction ϕ que l'on précisera.

b) En déduire que g s'annule une infinité de fois.